

УДК 517.5

Е.А. Севостьянов, С.А. Скворцов (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

Є.О. Севостьянов, С.О. Скворцов (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

E.A. Sevost'yanov, S.A. Skvortsov (Zhitomir Ivan Franko State University)

О нульмерности одного класса отображений в метрических пространствах

Про нульвимірність одного класу відображень в метричних просторах

On lightness of one class of mappings in metric spaces

Для отображений, удовлетворяющих одной оценке модуля семейств кривых в метрических пространствах, получен результат о нульмерности прообраза при отображении. Доказано, что отображения, удовлетворяющие указанной оценке, нульмерны, как только мажоранта, отвечающая за искажение семейств кривых, имеет конечное среднее колебание в каждой точке.

Для відображень, що задовольняють одну оцінку модуля сімей кривих у метричних просторах, отримано результат про нульвимірність прообразу при відображенні. Доведено, що відображення, які задовольняють вказану оцінку, нульвимірні, як тільки мажоранта, що відповідає за спотворення сімей кривих, має скінченне середнє коливання в кожній точці.

For mappings in metric spaces satisfying one inequality with respect to modulus of families of curves, there is proved a lightness of preimage under the mapping. It is proved that, the mappings, satisfying estimate mentioned above, are light, whenever a function which corresponds to distortion of families of curves under the mapping, is of finite mean oscillation at every point.

1. Введение. Основные определения и обозначения, используемые в статье, могут быть найдены в монографиях [1], [2] и [3].

Как известно, для отображений с ограниченным искажением по Решетняку имеют место неравенства вида

$$M(f(\Gamma)) \leq K \cdot (M(\Gamma)), \quad (1)$$

где M – модуль семейств кривых Γ , а K – коэффициент квазиконформности (см. [4]). Установлено, что указанные отображения открыты и дискретны, в частности – нульмерны, см. [1, теоремы 6.3 и 6.4, § 6, гл. II]. (Отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *нульмерным*, если $\dim \{f^{-1}(y)\} = 0$ для каждого $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, где \dim обозначает топологическую размерность множества, см. [5]). Если, напротив, задано неравенство вида (1), а priori не являющееся отображением с ограниченным искажением, то по поводу его дискретности (нульмерности), насколько нам известно, ничего нельзя утверждать, поскольку до сих пор это является открытой проблемой. Рассмотрим теперь неравенство, «противоположное к (1)»: пусть у нас вместо (1) имеет место соотношение

$$M(\Gamma) \leq K \cdot (M(f(\Gamma))). \quad (2)$$

Такие неравенства также установлены для отображений с ограниченным искажением: хорошо известно, что в этом случае $K := N(f, A)K_O(f)$, где $K_O = \text{vrai sup } K_O(x, f)$, $K_O(x, f)$ – максимальная дилатация, а $N(f, A)$ – максимальная кратность отображения f на множестве A , где лежит семейство Γ (см. [7, теорема 3.2], либо [2, теорема 6.7, гл. II]).

В случае n -мерного евклидова пространства отметим наличие положительного ответа на вопрос о дискретности отображения, участвующего (2). Именно, в сравнительно недавней работе [6] первым автором настоящей статьи доказан следующий общий результат: предположим, что при заданной измеримой по Лебегу функции $Q : D \rightarrow [1, \infty]$ отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяет оценке вида

$$M(\Gamma) \leq \int_{D'} Q(y) \cdot \rho_*^n(y) d\mu'(y),$$

где ρ_* – произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что $\int_{\gamma_*} \rho_*(y) ds \geq 1 \quad \forall \quad \gamma_* \in f(\Gamma)$, область $D' = f(D)$, а M – конформный модуль семейства кривых. Тогда отображение f нульмерно (более того – открыто и дискретно, см. [6, Теорема]).

Чтобы в каком-то смысле подытожить наши исследования в этом направлении, мы покажем в настоящей заметке, что упомянутый результат имеет место не только в \mathbb{R}^n , но также и в более общих метрических пространствах, регулярных по Альфорсу, в которых выполнено так называемое $(1, p)$ -неравенство Пуанкаре, где p – некоторое число, которое будет оговорено далее.

Теперь немного об определениях, используемых в тексте. Всюду далее (X, d, μ) и (X', d', μ') – произвольные метрические пространства с метриками d и d' , наделённые локально конечными борелевскими мерами μ и μ' , и конечными хаусдорфовыми

размерностями $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$, соответственно. Ниже мы считаем известными определения, связанные с кривыми в метрическом пространстве, длинами дуг, интегралами, условиями допустимости и так далее (см. [3, разд. 13]). Следуя [8, раздел 7.22] будем говорить, что борелева функция $\rho: X \rightarrow [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ , соединяющих точки x и $y \in X$, выполняется неравенство $|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} \rho |dx|$, где, как обычно, $\int_{\gamma} \rho |dx|$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ . Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1; p)$ -*неравенство Пуанкаре*, если найдётся постоянная $C \geq 1$ такая, что для каждого шара $B \subset X$, произвольной локально ограниченной непрерывной функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ и любого её верхнего градиента ρ выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u - u_B| d\mu(x) \leq C \cdot (\text{diam } B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \rho^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Метрическое пространство (X, d, μ) назовём *n -регулярным по Альфорсу*, если при каждом $x_0 \in X$, некоторой постоянной $C \geq 1$ и всех $R < \text{diam } X$

$$\frac{1}{C} R^n \leq \mu(B(x_0, R)) \leq C R^n.$$

Пусть G – область в метрическом пространстве (X, d, μ) . Следуя [9], будем говорить, что функция $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{G}$, пишем $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| d\mu(x) < \infty \quad (3)$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x)$$

– среднее интегральное значение функции $\varphi(x)$ над шаром

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

по отношению к мере μ . Условие (3) включает в себя предположение об интегрируемости функции φ по отношению к мере μ на множестве $B(x_0, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Пусть $p \geq 1$, тогда p -модулем семейства кривых Γ в метрическом пространстве X называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_X \rho^p(x) d\mu(x).$$

Областью D в метрическом пространстве X называется множество D , являющееся линейно связным в X . Пусть $E, F \subset X$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ которые соединяют E и F в D , т.е.

$\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Пусть D – область в X . Для $y_0 \in f(D)$ и чисел $0 < r_1 < r_2 < \infty$ обозначим

$$A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in X' : r_1 < d(y, y_0) < r_2\}, \quad S(y_0, r) = \{y \in X' : d(y, y_0) = r\}. \quad (4)$$

Если $f : D \rightarrow X'$ – заданное отображение, то для фиксированного $y_0 \in f(D)$ и произвольных $0 < r_1 < r_2 < \infty$ обозначим через $\Gamma(y_0, r_1, r_2)$ семейство всех кривых γ в области D таких, что $f(\gamma) \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Предположим, $f(A)$ измеримо в X' для любой области $A \subset X$, тогда при $p, q > 1$ рассмотрим вместо неравенство

$$M_p(\Gamma(y_0, r_1, r_2)) \leq \int_{f(D)} Q(y) \cdot \eta^q(y) d\mu'(y) \quad (5)$$

выполненное для любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (6)$$

Основной результат настоящей статьи заключает в себе следующая

Теорема 1. Предположим, (X, d, μ) и (X', d', μ') – метрические пространства с метриками d и d' , наделённые локально конечными борелевскими мерами μ и μ' , а G и G' – области в X и X' , имеющие конечные хаусдорфовы размерности $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$, соответственно. Предположим, кроме того, G – локально компактное и локально связное пространство, регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре при некотором $p \in [\alpha - 1, \alpha]$.

Пусть $f : G \rightarrow G'$ – непрерывное отображение, сохраняющее измеримость областей. Тогда, если f удовлетворяет (5) в каждой точке $y_0 \in f(G)$ при некотором $q \in (1, \alpha']$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (6), и $Q \in FMO$ в каждой точке $y_0 \in f(G)$, то отображение f либо нульмерно, либо постоянно в G .

2. Формулировка и доказательство основной леммы. Связный компакт $C \subset X$ будем называть *континуумом*. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 , пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2 . В этом случае, $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$ (см., напр., [10, теорема 1]).

Справедливо следующее утверждение (см. [11, предложение 4.7]).

Предложение 1. Пусть X – α -регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, $\alpha \geq 1$, $\alpha - 1 \leq p \leq \alpha$. Тогда для произвольных континуумов E и F , содержащихся в шаре $B(x_0, R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}{R^{1+p-\alpha}}.$$

Следующая лемма включает в себя основной результат настоящей работы в наиболее общей ситуации.

Лемма 1. Предположим, (X, d, μ) и (X', d', μ') – метрические пространства с метриками d и d' , наделённые локально конечными борелевскими мерами μ и μ' , а G и G' – области в X и X' , имеющие конечные хаусдорфовы размерности $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$, соответственно. Предположим, кроме того, G – локально компактное и локально связное пространство, регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре при некотором $p \in [\alpha - 1, \alpha]$.

Далее, предположим, что для при некотором $q \in (1, n]$ и каждого $y_0 \in D$ найдётся $\varepsilon_0 > 0$, для которого выполнено соотношение

$$\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \psi^q(d'(y, y_0)) d\mu'(y) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0)) \quad (7)$$

для некоторой измеримой по Лебегу функции $\psi(t) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, такой что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad (8)$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$ определено в (4) при $r_1 = \varepsilon$, $r_2 = \varepsilon_0$.

Пусть $f : G \rightarrow G'$ – непрерывное отображение, сохраняющее измеримость областей. Тогда, если f удовлетворяет (5) в каждой точке $y_0 \in f(G)$ при некоторой измеримой функции $Q : G \rightarrow [0, \infty]$, некотором фиксированном $q \in (0, \alpha']$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (6), то f либо нульмерно, либо постоянно.

Замечание 1. В условиях леммы 1, можно считать, что для произвольного фиксированного A , такого что $0 < A < \varepsilon_0$, и всех $\varepsilon \in (0, A)$, выполняется условие вида $\int_{\varepsilon}^A \psi(t) dt > 0$. Действительно, из того, что $Q(x) > 0$ п.в. и $\psi > 0$, а также соотношений

(7) и (8) следует, что $\int_{\varepsilon}^A \psi(t) dt \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку величина интеграла слева в (7) увеличивается при уменьшении ε .

Доказательство леммы 1. Если отображение f постоянно, доказывать нечего. Пусть $f \neq \text{const}$. Предположим противное, а именно, что отображение f не нульмерно. Тогда найдётся $y_0 \in G$, такое что множество $\{f^{-1}(y_0)\}$ не является всюду разрывным. Следовательно, по определению, существует невырожденное связное множество $C \subset \{f^{-1}(y_0)\}$. Поскольку пространство X локально компактно, можно считать, что C – континуум.

Поскольку по предположению $f \neq y_0$, ввиду непрерывности отображения f найдётся $x_0 \in G$ и $\delta_0 > 0 : \overline{B(x_0, \delta_0)} \subset G$ и

$$f(x) \neq y_0 \quad \forall \quad x \in \overline{B(x_0, \delta_0)}. \quad (9)$$

Ввиду локальной компактности G можно считать, что $\overline{B(x_0, \delta_0)}$ – компакт в X . Кроме того, ввиду локальной связности G найдётся связная окрестность $U \subset B(x_0, \delta_0)$. Тогда \overline{U} – континуум в G .

По предложению 1 при $p \in [\alpha - 1, \alpha]$ будем иметь

$$M_p(\Gamma(C, \overline{U}, G)) > 0. \quad (10)$$

Заметим, что в силу неравенства (9) и в виду соотношения $f(C) = \{y_0\}$, ни одна из кривых семейства $\Delta = f(\Gamma(C, \overline{U}, G))$ не вырождается в точку. В то же время, все кривые указанного выше семейства Δ имеют одним из своих концов точку y_0 . Пусть Γ_i – семейство кривых $\alpha_i(t) : (0, 1) \rightarrow G'$ таких, что $\alpha_i(1) \in S(y_0, r_i)$, $r_i < \varepsilon_0$, r_i – некоторая строго положительная вещественная последовательность, такая что $r_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $\alpha_i(t) \rightarrow y_0$ при $t \rightarrow 0$. Тогда мы вправе записать:

$$\Gamma(C, \overline{U}, G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^*, \quad (11)$$

где Γ_i^* – подсемейство всех кривых γ из $\Gamma(C, \overline{U}, G)$, таких что $f(\gamma)$ имеет подкривую в Γ_i . Заметим, что для произвольного $\varepsilon \in (0, r_i)$ ввиду [3, предложение 13.3]

$$\Gamma_i^* > \Gamma(y_0, \varepsilon, r_i). \quad (12)$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\eta_{i,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, r_i), & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, r_i), \end{cases}$$

где $I(\varepsilon, r_i) = \int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt$. Заметим, что $\int_{\varepsilon}^{r_i} \eta_{i,\varepsilon}(t)dt = 1$, поэтому мы можем воспользоваться неравенством вида (5). Исходя из этого неравенства, ввиду соотношения (12), получаем:

$$M_p(\Gamma_i^*) \leq M_p(\Gamma(y_0, \varepsilon, r_i)) \leq \int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \cdot \eta_{i,\varepsilon}^q(d'(y, y_0)) d\mu'(y) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \quad (13)$$

где $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \frac{1}{I(\varepsilon, r_i)^q} \int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \psi^q(d'(y, y_0)) d\mu'(y)$ и $I(\varepsilon, r_i) = \int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt$. Учитывая (7), имеем следующее соотношение:

$$\int_{A(y_0, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(y) \psi^q(d'(y, y_0)) d\mu'(y) = G(\varepsilon) \cdot \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt \right)^q,$$

где $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по условию леммы. Заметим, что $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = G(\varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt}{\int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt} \right)^q$,

где $\int_{r_i}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$ – фиксированное число, а $\int_{\varepsilon}^{r_i} \psi(t)dt \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поскольку величина интеграла слева в (7) увеличивается при уменьшении ε . Таким образом, $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Переходя к пределу в неравенстве (13) при $\varepsilon \rightarrow 0$, левая часть которого не зависит от ε , получаем, что $M_p(\Gamma_i^*) = 0$ при любом натуральном i . Однако, тогда $M_p(\Gamma(C, \overline{U}, G)) = 0$ в виду соотношения (11) и того, что $M_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_p(\Gamma_i)$ (см. [10, теорема 1]), что противоречит неравенству (10). Полученное противоречие доказывает, что отображение f является нульмерным, что и требовалось доказать. \square

3. О доказательстве основного результата. Доказательство теоремы 1 вытекает из леммы 1 и [3, лемма 13.2].

Действительно, согласно [3, лемма 13.2], условие $Q \in FMO(y_0)$ влечёт, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < d'(y, y_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^q(d'(y, y_0)) d\mu'(y) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где $\psi(t) = (t \log \frac{1}{t})^{-\alpha/q} > 0$ и $0 < q \leq \alpha$. Как и прежде, определим $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$, тогда

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt > \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

В таком случае, заключаем, что условия (7)–(8) леммы 1 выполнены и, значит, из этой леммы вытекает требуемое утверждение. \square

В частности, справедливо следующее заключение, вытекающее из леммы 1 и [3, следствие 13.3].

Следствие 1. Предположим, (X, d, μ) и (X', d', μ') – метрические пространства с метриками d и d' , наделённые локально конечными борелевскими мерами μ и μ' , а G и G' – области в X и X' , имеющие конечные хаусдорфовы размерности $\alpha \geq 2$ и $\alpha' \geq 2$, соответственно. Предположим, кроме того, G – локально компактное и локально связное пространство, регулярное по Альфорсу, в котором выполнено $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре при некотором $p \in [\alpha - 1, \alpha]$.

Пусть $f : G \rightarrow X'$ – непрерывное отображение, сохраняющее измеримость областей. Тогда, если f удовлетворяет (5) в каждой точке $y_0 \in f(G)$ при некотором $q \in (0, \alpha']$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (6), и

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu'(B(y_0, \varepsilon))} \int_{B(y_0, \varepsilon)} Q(y) d\mu'(y) < \infty$$

в каждой точке $y_0 \in f(G)$, то отображение f либо нульмерно, либо постоянно в G .

Список литературы

- [1] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

- [2] *Rickman S.* Quasiregular mappings. Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 213 p.
- [3] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p.
- [4] *Полецкий Е.А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261–272.
- [5] *Hurewicz W. and Wallman H.* Dimension Theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. – 165 p.
- [6] *Севостьянов Е.А.* Об открытости и дискретности отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Укр. матем. ж. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1128–1134.
- [7] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
- [8] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.
- [9] *Игнатъев А., Рязанов В.* К теории граничного поведения пространственных отображений // Укр. матем. вестник. – 2006. – **3**, № 2. – С. 199–211.
- [10] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
- [11] *Adamowicz T. and Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 609–626.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Евгений Александрович Севостьянов

Сергей Александрович Скворцов

Житомирский государственный университет им. И. Франко

кафедра математического анализа, ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru